Μεθοδος «Διαιρει και Βασιλευε»

12.9 Τι γνωρίζετε για τη μέθοδο διαίρει και βασίλευε;

Ορισμός

Η **διαίρει και βασίλευε** (divide and conquer) αποτελεί μια μέθοδο σχεδίασης αλγορίθμων στην οποία εντάσσονται οι τεχνικές που υποδιαιρούν ένα πρόβλημα σε μικρότερα υποπροβλήματα, που έχουν την ίδια τυποποίηση με το αρχικό πρόβλημα, αλλά είναι μικρότερα σε μέγεθος. Με όμοιο τρόπο, τα υποπροβλήματα αυτά μπορούν να διαιρεθούν σε ακόμη μικρότερα υποπροβλήματα κ.ο.κ. Έτσι, η επίλυση ενός προβλήματος ανάγεται στη σταδιακή επίλυση των όσο το δυνατόν μικρότερων υποπροβλημάτων, ώστε τελικά να προκύψει η συνολική λύση του αρχικού ευρύτερου προβλήματος.
Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται «από πάνω προς τα κάτω» (top – down).

Ένας κλασικός αλγόριθμος που ακολουθεί τη φιλοσοφία της μεθόδου διαίρει και βασίλευε είναι η δυαδική αναζήτηση, η οποία εφαρμόζεται μόνο στην περίπτωση ενός ταξινομημένου συνόλου στοιχείων.

Στο πλαίσιο του μαθήματος η υλοποίηση της μεθόδου διαίρει και βασίλευε γίνεται με την επαναληπτική προσέγγιση (με διαδοχικές επαναλήψεις).

Ο μέγιστος αριθμός των συγκρίσεων (επαναλήψεων) που απαιτούνται για την εύρεση ενός στοιχείου σε ένα σύνολο «n» ταξινομημένων στοιχείων, συμπεριλαμβανομένης και της περίπτωσης μη ύπαρξης του στοιχείου, δίνεται από το ακέραιο μέρος του $\left[\log_2(n)+1\right]$ (με στρογγυλοποίηση προς τα κάτω), η απόδειξη του οποίου υπερβαίνει τα όρια της διδακτέας ύλης του μαθήματος. Επομένως για την εύρεση του μέγιστου πλήθους των επαναλήψεων θεωρείται γνωστό το $\log_2(n)$.

Για παράδειγμα, σε ένα σύνολο 100 ταξινομημένων στοιχείων $(n=100)$ ο μέγιστος αριθμός συγκρίσεων (επαναλήψεων) είναι $\left[\log_2(100)+1\right]=\left[6,643856+1\right]=\left[7,643856\right]=7$.

12.10 Με ποια βήματα μπορεί να αποδοθεί η μέθοδος διαίρει και βασίλευε;

Η μέθοδος σχεδίασης αλγορίθμων διαίρει και βασίλευε μπορεί να αποδοθεί με τα επόμενα βήματα:

- Δίνεται για επίλυση ένα στιγμιότυπο ενός προβλήματος.
- Το στιγμιότυπο του προβλήματος υποδιαιρείται σε υπο-στιγμιότυπα του ίδιου προβλήματος.
- Δίνεται ανεξάρτητη λύση σε κάθε ένα υπο-στιγμιότυπο.
- Συνδυάζονται όλες οι μερικές λύσεις που βρέθηκαν για τα υπο-στιγμιότυπα, έτσι ώστε να δοθεί η συνολική λύση του προβλήματος.

12.11 Παράδειγμα (μέθοδος διαίρει και βασίλευε και θεώρημα Bolzano)

Ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί η δυαδική αναζήτηση είναι ανάλογος με αυτόν της μεθόδου της διχοτόμησης. Η μέθοδος της διχοτόμησης (ή του Bolzano) χρησιμοποιείται για την εύρεση ρίζας μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[a,b]$. Όπως γνωρίζουμε, στο διάστημα αυτό υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα, αν ισχύει $f(a)\cdot f(b)<0$ (για την ακρίβεια μπορεί να υπάρχει περιττός αριθμός ριζών). Με τη μέθοδο της διχοτόμησης βρίσκεται ένα σημείο $x_1=\dfrac{a+b}{2}$ στο μέσο του διαστήματος $[a,b]$ και εξετάζεται αν ισχύει η συνθήκη $f(a)\cdot f(x_1)<0$. Αν ναι, τότε η ρίζα υπάρχει στο διάστημα $[a,x_1]$, αλλιώς στο $[x_1,b]$. Στη συνέχεια βρίσκεται το μέσο x_2 του υποδιαστήματος όπου υπάρχει η ρίζα και επαναλαμβάνονται τα ίδια. Έτσι, σε κάθε επανάληψη εξαιρείται από την έρευνα το μισό διάστημα και προφανώς η ακολουθία τιμών $x_1, x_2, \ldots$ συγκλίνει προς τη ρίζα της συνάρτησης. Η διαδικασία τερματίζεται όταν η προσέγγιση της ρίζας θεωρείται ικανοποιητική.

Να γράψετε πρόγραμμα σε ΓΛΩΣΣΑ το οποίο για τη συνεχή συνάρτηση $f(x)=3x^5+7x-2$:

α. Να διαβάζει τις τιμές των άκρων a και b του διαστήματος $[a,b]$, ελέγχοντας ώστε να είναι $a<b$.

β. Να εμφανίζει το μήνυμα «Δεν ικανοποιείται η βασική προϋπόθεση του θεωρήματος (f(a)f(b) < 0)» στην περίπτωση όπου δεν ισχύει η προϋπόθεση $f(a)\cdot f(b)<0$ του θεωρήματος Bolzano.

γ. Κατόπιν, υλοποιώντας τη μέθοδο της διχοτόμησης και για κάθε βήμα της:

1. Στην περίπτωση όπου $|f(a)|<\dfrac{1}{10000}$ ή $|f(b)|<\dfrac{1}{10000}$, να εμφανίζει ως ρίζα της f όποια από τις τιμές των a και b δίνει τιμή στη συνάρτηση πιο κοντά στο 0.
2. Να βρίσκει την τιμή του μέσου c του διαστήματος $[a,b]$, καθώς και την τιμή $f(c)$.
3. Στην περίπτωση όπου το c είναι ρίζα της f, να εμφανίζει την τιμή του c και να σταματά.
4. Στην περίπτωση όπου το $[a,b]$ έχει μήκος το πολύ $\dfrac{2}{10000}$, να εμφανίζει το c ως ρίζα της f με προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού και να σταματά.
5. Στην περίπτωση όπου $f(a)\cdot f(c)<0$, να λαμβάνεται η τιμή του c ως νέα τιμή του b.
6. Στην περίπτωση όπου $f(c)\cdot f(b)<0$, να λαμβάνεται η τιμή του c ως νέα τιμή του a.
7. Στην περίπτωση όπου η μέθοδος ξεπεράσει τα 10000 βήματα (επαναλήψεις), να σταματά χωρίς να έχει βρεθεί ρίζα.

δ. Τέλος, να εμφανίζει τον αριθμό των βημάτων (επαναλήψεων) που απαιτήθηκαν.

Ανάλυση

Στο δοσμένο πρόγραμμα αναδύονται θέματα που είναι άξια σχολιασμού ακριβώς επειδή στον υπολογιστή η αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών γίνεται πάντα με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων. Κάποια από τα θέματα αυτά ανήκουν στο πεδίο της Αριθμητικής Ανάλυσης και της Θεωρίας Σφαλμάτων. Έτσι:

- Το πρόγραμμα σταματά μετά τα 10000 βήματα γιατί αλλιώς υπάρχει περίπτωση ο βρόχος να είναι ατέρμων. Η ρύθμιση αυτή μπορεί να προσαρμοστεί και να γίνει μικρότερη ή μεγαλύτερη, να σταματά π.χ. στα 200000 βήματα.

- Στις περισσότερες γλώσσες προγραμματισμού (και στον Διερμηνευτή της ΓΛΩΣΣΑΣ), το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται για να αναπαρασταθεί ένας πραγματικός αριθμός μπορεί και αυτό να ρυθμιστεί. Έτσι, μπορεί οι υπολογισμοί να γίνουν με λίγα ή πολλά δεκαδικά ψηφία (π.χ. 2, 4, 8 ή περισσότερα) ανάλογα με την ακρίβεια που απαιτείται.

- Η συνθήκη $|f(a)| < \frac{1}{10000}$ σημαίνει ότι το f(a) βρίσκεται πολύ κοντά στο 0, γι' αυτό μπορεί το a να ληφθεί ως ρίζα της f.

- Στην περίπτωση όπου η ρίζα εγκλωβιστεί σε ένα διάστημα [a, b] μήκους το πολύ $\frac{2}{10000}$, μπορεί το μέσο c του διαστήματος να ληφθεί ως ρίζα της f με λάθος (προσέγγιση) το πολύ $\frac{1}{10000}$. Και η ρύθμιση αυτή μπορεί να αλλάξει ώστε η ρίζα να αναζητηθεί με ακρίβεια εκατοστού ή εκατομμυριοστού. Στην τελευταία, βέβαια, περίπτωση ο αριθμός των βημάτων της μεθόδου θα αυξηθεί σημαντικά.

- Τέλος, η διχοτόμηση του διαστήματος [a, b] είναι αυτή που θυμίζει ακριβώς τη δυαδική αναζήτηση. Σε κάθε επανάληψη το διάστημα διχοτομείται και, αν δεν βρεθεί η ρίζα, γίνεται έλεγχος αν το θεώρημα Bolzano ισχύει στο αριστερό ή στο δεξί υποδιάστημα. Επειδή δεν μπορεί να βρεθούν όλες οι ρίζες της f στο αρχικό διάστημα, η μέθοδος επιλέγει ένα υποδιάστημα κάθε φορά και συνεχίζει.

Επίλυση

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Bolzano
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: n
    ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: a, b, c, fa, fb, fc
    ΛΟΓΙΚΕΣ: done
ΑΡΧΗ
ΓΡΑΨΕ 'Δώστε τα άκρα του διαστήματος (δοκιμάστε 0 και 1)'
ΑΡΧΗ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΔΙΑΒΑΣΕ a, b
ΜΕΧΡΙΣ_ΟΤΟΥ a < b
fa <– 3 * a ^ 5 + 7 * a – 2
fb <– 3 * b ^ 5 + 7 * b – 2
```

```
ΑΝ fa * fb >= 0 ΤΟΤΕ
   ΓΡΑΨΕ 'Δεν ικανοποιείται η βασική προϋπόθεση του θεωρήματος (f(a)f(b) < 0)'
ΑΛΛΙΩΣ
   ΓΡΑΨΕ 'Θα προσπαθήσω να βρω ρίζα της f(x) = 3 * x ^ 5 + 7 * x – 2'
   ΓΡΑΨΕ ' στο διάστημα (', a, ',', b, ')'
   ΓΡΑΨΕ 'Παρακαλώ περιμένετε...'
   n <– 0
   done <– ΨΕΥΔΗΣ
   ΟΣΟ done = ΨΕΥΔΗΣ ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ
      n <– n + 1
      ΑΝ Α_Τ(fa) < 1 / 10000 Ή Α_Τ(fb) < 1 / 10000 ΤΟΤΕ
         ΑΝ Α_Τ(fa) < Α_Τ(fb) ΤΟΤΕ
            ΓΡΑΨΕ 'Η f(x) = 0 έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα, τη x =  ', a
         ΑΛΛΙΩΣ
            ΓΡΑΨΕ 'Η f(x) = 0 έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα, τη x =  ', b
         ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
         done <– ΑΛΗΘΗΣ
      ΑΛΛΙΩΣ
         ! Παίρνουμε το διάστημα στο οποίο εφαρμόζεται το
         ! θεώρημα και το κόβουμε στη μέση (bisection method)
         c <– (a + b) / 2
         fc <– 3 * c ^ 5 + 7 * c – 2
         ΑΝ fc = 0 ΤΟΤΕ
            ΓΡΑΨΕ 'Η f(x) = 0 έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα, τη x = ', c, '.'
            done <– ΑΛΗΘΗΣ
         ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ b – a <= 2 / 10000 ΤΟΤΕ
            ΓΡΑΨΕ 'Η f(x) = 0 έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα, τη x =  '
            ΓΡΑΨΕ c, ' με προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού.'
            done <– ΑΛΗΘΗΣ
         ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ fa * fc < 0 ΤΟΤΕ
            b <– c
            fb <– 3 * b ^ 5 + 7 * b – 2
         ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ fc * fb < 0 ΤΟΤΕ
            a <– c
            fa <– 3 * a ^ 5 + 7 * a – 2
         ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
      ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
      ΑΝ n > 10000 ΚΑΙ done = ΨΕΥΔΗΣ ΤΟΤΕ
         ΓΡΑΨΕ 'Η μέθοδος ξεπέρασε τα 10000 βήματα.'
```

```
            ΓΡΑΨΕ 'Δεν βρέθηκε ρίζα...'
            done <-- ΑΛΗΘΗΣ
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
    ΓΡΑΨΕ 'Η μέθοδος χρησιμοποίησε ', n, ' βήματα.'
ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
```